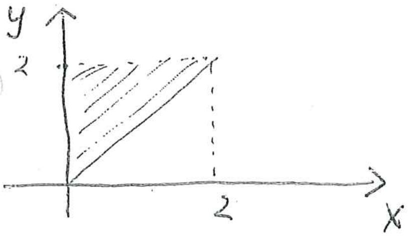
Eks.

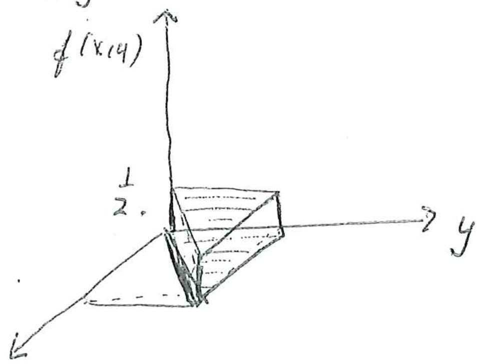
Ein brus automat blir kun påfyld i starten av dagen.

Y = påfyld brus i gallon

X = tappa brus.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \le x \le y,\ 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{elles} \end{cases}$$





$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^y \frac{1}{2}\,dx \ \text{d:} \begin{cases} \frac{y}{2}, & 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{elles} \end{cases}$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_x^2 \frac{1}{2}\,dy \ \text{d:} \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{elles} \end{cases}$$

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{y}{2}} \ \text{d:} \begin{cases} \frac{1}{y}, & 0 \le x \le y \\ 0 & \text{elles.} \end{cases}$$

$$P(X \le \tfrac{y}{2} \mid Y = y) = \int_0^{\frac{y}{2}} \frac{1}{y}\,dx = \frac{1}{y} \cdot \frac{y}{2} = \frac{1}{2}.$$

Eks. Industriprosess

X = prosentvis ureinheit.

Y = prosentvis " — av all ureinheit av type A

Definisjon 3.12

To stokastiske variable X og Y er sagt å vere uavh. dersom $f(x,y) = h(y) \cdot g(x)$, $\forall (x,y)$ i verdiområdet for X og Y.

Definisjon 3.13

$X_1, \ldots, X_n$ er uavh. dersom

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \ldots \cdot f(x_n), \quad \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Kap 4 Matematisk forventing

Eks. Oljeselskap. Er utvinning lønnsomt?

Utfallsrom	$P(e)$	Forteneste $X(e)$	$Y = (X - E(X))^2$
e_1	0.2	-20	$(22.5)^2$
e_2	0.1	5	$(2.5)^2$
e_3	0.2	5	$(2.5)^2$
e_4	0.5	10	$(7.5)^2$

X	-20	5	10
$P(X=x)$	0.2	0.3	0.5

Eks.

X_i: 2 2 2 3 3 6

$$3 = \bar{x} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 6}{6} = \sum_x x \cdot \text{relfrekv}(x)$$

$$\rightarrow \sum_x x f(x)$$

Definisjon 4.1

La X vere ein diskret variabel. Forventingsverdien til X er definert som

$$\mu = E[X] = \sum x f(x), \quad \text{dersom den eksisterer}$$

Eks. Oljeselskap

$$E[X] = -20 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.3 + 10 \cdot 0.5 = 2.5$$

Eks. Levetid for lyspærer

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{elles} \end{cases} \qquad E[X] \approx \sum x_i f(x_i)\,\Delta x \to \int_0^{\infty} x f(x)\,dx$$

slik at $E[X] = \int_0^{\infty} x e^{-x}\,dx = \left[x e^{-x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = 1$

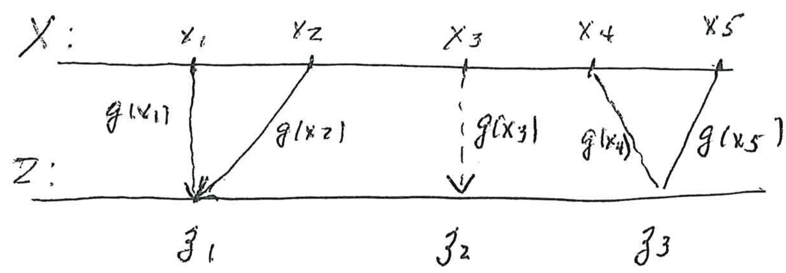
Def. 4.1

For kontinuerleg fordelte variable er forventningsverdien definert som

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \quad \text{dersom den eksisterer.}$$

Kva med og ein funksjon $g(X) = Z$

Eks.



$$E[Z] = z_1 P(Z=z_1) + z_2 P(Z=z_2) + z_3 P(Z=z_3)$$

$$= \overset{g(x_1)}{z_1} P(X=x_1) + \overset{g(x_2)}{z_1} P(X=x_2) + \overset{g(x_3)}{z_2} P(X=x_3) + \overset{g(x_4)}{z_3} P(X=x_4) + \overset{g(x_5)}{z_3} P(X=x_5)$$

$$= \sum g(x_i) \cdot P(X=x_i)$$

Teorem 4.1

La X ha punktsannsyn / sannsynstettleik $f(x)$

$$\text{Då er } E[g(X)] = \begin{cases} \sum_x g(x) f(x), & x \text{ diskret} \\ \int g(x) f(x)\,dx, & x \text{ kont.} \end{cases}$$

Forventning til funksjonar av fleire variable

Eks. X = talet på born i tilf. valgt familie

Y = talet på rom

$x \backslash y$	1	2	3	4	$P(X=x)$
0	0.11	0.09	0.07	0.01	0.28
1	0.07	0.12	0.12	0.02	0.33
2	0.02	0.05	0.17	0.05	0.29
3	0.00	0.02	0.04	0.02	0.08
4	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02
$P(Y=y)$	0.20	0.28	0.41	0.11	

$$E[X] = 0 \cdot 0.28 + 1 \cdot 0.33 + 2 \cdot 0.29 + 3 \cdot 0.08 + 4 \cdot 0.02 = 1.23$$

$$E[Y] = 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.28 + 3 \cdot 0.41 + 4 \cdot 0.11 = 2.43$$

Trangbudd dersom $\frac{X+2}{Y} > 2$

La $Z = 2Y - (X+2)$ ⇒: ledig kapasitet før trangbudd

z	$-4 \cdots 1 \cdots 6$
$P(Z=z)$	

Vi har $z = k \iff 2Y - (X+2) = k \iff y = \frac{k}{2} + \frac{x+2}{2}$

$z = 2 \iff y = \frac{x}{2} + 2$ ⇒: $x = 0,\ y = 2$

$x = 2,\ y = 3$

$x = 4,\ y = 4$

s.a. $P(Z = 2) = f(0,2) + f(2,3) + f(4,4)$

$$E[Z] = \sum z_i\, P(Z = z_i) = -4\,P(Z=-4) + \cdots + \underbrace{2 \cdot P(Z=2)}_{g(0,2)\,f(0,2) + g(2,3)\,f(2,3) + g(4,4)\,f(4,4)} + \cdots + 6\,P(Z=6)$$

s.a. $E[Z] = \sum_x \sum_y g(x,y)\, f(x,y)$

Definisjon 4.2

$$E[g(x,y)] = \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x,y)\, f(x,y) & \text{for diskrete variable} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f(x,y)\,dx\,dy & \text{for kontinuerlege -"-} \end{cases}$$

No og til kan dette forenklast

$$E[Z] = \sum_x \sum_y (2y - x - 2)\, f(x,y)$$

$$= \sum_x \sum_y 2y\, f(x,y) - \sum_x \sum_y x\, f(x,y) - \sum_x \sum_y 2\, f(x,y)$$

$$= 2 \sum_y y\, h(y) - \sum_x x\, g(x) - 2$$

$$= 2E[Y] - E[X] - 2 = 4.86 - 1.23 - 2 = 1.63.$$

Betinga forventning

Gitt at $Y = 1$

x	0	1	2	3	4
$f(x\mid 1)$	0.55	0.35	0.1	0	0

$$E[X \mid Y=1] = 0 \cdot 0.55 + 1 \cdot 0.35 + 2 \cdot 0.1 = 0.55$$